数理解析研究所講究録
第 770 巻 1991 年 21-25

Remarks on the Asymptotic Behaviour for Elliptic Equations with Critical Growth

東大理　石村　直之 (NAOYUKI ISHIMURA)

1. INTRODUCTION

次の問題を考える。

$$
\text{(I)} \qquad \begin{cases} -\triangle u - \lambda(\epsilon)u = N(N-2)u^{p-\epsilon} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

ここで Ω は $\mathbf{R}^N (N \geq 3)$ の単位球、$p = (N+2)/(N-2), \epsilon \geq 0$, また $\lambda(\epsilon)$ は ϵ の given function とする。

本講演では (I) の解 u_ϵ の $\epsilon \to 0$ のときの振舞いを問題にする。

まず知られている事実を述べる。

(1) (I) の解は球対称、単調減少である ([**GNN**])。

(2) $\epsilon > 0$ のとき (I) は任意の $\lambda(\epsilon) < \lambda_0$ に対して解を持つ。$\epsilon = 0$ のとき (I) は

$$
\lambda(0) \in (0, \lambda_0) \qquad N \geq 4
$$
$$
\lambda(0) \in (\frac{1}{4}\lambda_0, \lambda_0) \qquad N = 3
$$

のとき、そのときに限り解を持つ。ここで λ_0 は $-\triangle$ の単位球における主固有値である ([**BN**])。

(3) $\lambda(\epsilon) \equiv 0$ のとき、u_ϵ の極限での振舞いは次で与えられる。

$$
\begin{cases} \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{1/2} \cdot u_\epsilon(0) = \left(\frac{2\sigma_N}{N-2}\right)^{1/2} \left(\frac{N(N-2)}{S_N}\right)^{N/4} \\ \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1/2} \cdot u_\epsilon(x) = \\ \qquad = \left(\frac{2\sigma_N}{N-2}\right)^{-1/2} \left(\frac{N(N-2)}{S_N}\right)^{-N/4} \cdot (N-2)\sigma_N G(x) \qquad x \neq 0. \end{cases}
$$

ここで

$G(x)$は単位球における $-\triangle$のGreen's function,

$\sigma_N = \dfrac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}$は$\mathbf{R}^N$における単位球の表面積,

$S_N = \pi N(N-2)\left(\dfrac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right)^{2/N}$はbest Sobolev constant

である ([**AP**])。 彼らは ODE の方法を用いている。

(4) $N=3, \lambda(\epsilon)\equiv\lambda$ independent of ϵ のとき、u_ϵ の極限での振舞いは次で与えられる。

$0\le\lambda<\lambda_0/4=\pi^2/4$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1/2}u_\epsilon(0)=\left(\frac{32}{\pi}\frac{\sqrt{\lambda}}{\tan\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2} \\ \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-1/2}u_\epsilon(x)=\left(\frac{32}{\pi}\frac{\sqrt{\lambda}}{\tan\sqrt{\lambda}}\right)^{-1/2}\cdot 4\pi G_\lambda(x) \qquad x\neq 0. \end{cases}$$

ここで $G_\lambda(x)$ は $-\Delta-\lambda$ の Green's function:

$$G_\lambda(x)=\frac{1}{4\pi|x|}\left\{\cos(\sqrt{\lambda}|x|)-\frac{\sin(\sqrt{\lambda}|x|)}{\tan\sqrt{\lambda}}\right\}.$$

$\lambda=\pi^2/4$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{1/4}u_\epsilon(0)=(8\pi^2)^{1/4} \\ \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-1/4}u_\epsilon(x)=(8\pi^2)^{-1/4}\cdot 4\pi G_{\pi^2/4}(x) \qquad x\neq 0. \end{cases}$$

どちらの場合でも

$$u_\epsilon(0)\cdot u_\epsilon\to 4\pi G_\lambda \qquad \text{as } \epsilon\to 0 \text{ in } L^2(\Omega)$$

が成り立つ ([**BP**])。彼らは PDE の方法を用いている。

本講演では general $\lambda(\epsilon)$ に対する解の振舞いを論じる。
簡単のため次の場合の考察に限定する。

$$\lambda(0)=\frac{\pi^2}{4} \qquad \text{if } N=3$$
$$\lambda(0)=0 \qquad \text{if } N\ge 4.$$

また、次の記法を用いる。

$$\lambda(\epsilon)=\frac{\pi^2}{4}+\lambda_\epsilon \qquad \text{if } N=3$$
$$\lambda(\epsilon)=\lambda_\epsilon \qquad \text{if } N\ge 4.$$

ただし、$\lambda_\epsilon\to 0$ とする。さらに、

$$\mu_\epsilon^{-(N-2)/2}=\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}=u_\epsilon(0)$$

と書く。ここで

$$\mu_\epsilon\to 0 \qquad \text{as } \epsilon\to 0$$

に注意する。

2. Results and the sketch of the proof

次の **asymptotic relations** を証明する。この関係式が極限での振舞いを決定する。

Proposition. $\epsilon \to 0$ のとき次が成り立つ。

(A) $N = 3$ のとき。

$$\frac{\pi^2}{8} \cdot \epsilon = -2\pi\lambda_\epsilon\mu_\epsilon + \pi^4\mu_\epsilon^2 + o(\epsilon) + o(\mu_\epsilon^2) + o(\lambda_\epsilon\mu_\epsilon).$$

(B) $N = 4$ のとき。

$$\frac{2}{3}\pi^2 \cdot \epsilon = -2\pi^2\lambda_\epsilon\mu_\epsilon^2 \log\frac{1}{\mu_\epsilon^2} + 8\pi^2\mu_\epsilon^2 + \\ + o(\epsilon) + o(\mu_\epsilon^2) + o(\lambda_\epsilon\mu_\epsilon^2 \log\frac{1}{\mu_\epsilon^2}).$$

(C) $N \geq 5$ のとき。

$$\frac{(N-2)^3}{2}\left(\frac{S_N}{N(N-2)}\right)^{N/2} \cdot \epsilon = -2\sigma_N a_N \lambda_\epsilon\mu_\epsilon^2 + (N-2)^2\sigma_N\mu_\epsilon^{N-2} + \\ + o(\epsilon) + o(\mu_\epsilon^{N-2}) + o(\lambda_\epsilon\mu_\epsilon^2),$$

ここで

$$a_N = \int_0^\infty \frac{r^{N-1}}{(1+r^2)^{N-2}}\, dr < \infty.$$

これらの関係式の直接の結果が次である。

Theorem 1. $N = 3, q > 2, C > 0$ とする。u_ϵ を、以下のもとでの *(I)* の解とする。

$$\begin{cases} 2 < q < 4 \text{ のとき、} \\ \qquad \lambda(\epsilon) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{16}C^2 \cdot \epsilon^{1-2/q} \\ q = 4 \text{ のとき、} \\ \qquad \lambda(\epsilon) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8\pi^2 - C^4}{16C^2}\pi \cdot \epsilon^{1/2} \\ q > 4 \text{ のとき、} \\ \qquad \lambda(\epsilon) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{2}C^2 \cdot \epsilon^{2/q}. \end{cases}$$

このとき、u_ϵ の *asymptotic behaviour* は

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{1/q} \cdot u_\epsilon(0) = C \\ \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-1/q} \cdot u_\epsilon(x) = C^{-1} \cdot 4\pi G_{\pi^2/4}(x) \qquad x \neq 0 \end{cases}$$

で与えられる。

Theorem 2. $N \geq 5, q > 4/(N-2), C > 0$ とする。u_ϵ を以下のもとでの (I) の解とする。

$$\begin{cases} 4/(N-2)q < 2 \text{ のとき、} \\ \qquad \lambda(\epsilon) = -\frac{(N-2)^3}{4\sigma_N a_N}\left(\frac{S_N}{N(N-2)}\right)^{N/2} C^{4/(N-2)} \cdot \epsilon^{1-\frac{4}{(N-2)q}} \\ q > 2 \text{ のとき、} \\ \qquad \lambda(\epsilon) = \frac{(N-2)^2}{2a_N} C^{-2(N-4)/(N-2)} \cdot \epsilon^{\frac{2(N-4)}{(N-2)q}} \\ q = 2 \text{ のとき、} \\ \qquad \lambda(\epsilon) = r(C) \cdot \epsilon^{\frac{N-4}{N-2}}, \end{cases}$$

ただし、$r(C)$ は次の方程式の解である：

$$\frac{(N-2)^3}{2}\left(\frac{S_N}{N(N-2)}\right)^{N/2} C^2 = (N-2)^2\sigma_N - 2r(C) \cdot \sigma_N a_N C^{\frac{2(N-4)}{N-2}}.$$

このとき、u_ϵ の **asymptotic behaviour** は

$$\begin{cases} \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{1/q} \cdot u_\epsilon(0) = C \\ \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-1/q} \cdot u_\epsilon(x) = C^{-1} \cdot (N-2)\sigma_N G(x) \qquad x \neq 0 \end{cases}$$

で与えられる。

以下 **Proposition** の証明の概略を述べる。

[**BP**] に従い、**Pohozaev identity**：

$$\frac{N(N-2)^3}{2N-(N-2)\epsilon} \cdot \epsilon \int_\Omega u_\epsilon^{p+1-\epsilon}\, dx = \int_{\partial\Omega} (x,n)\left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}\right)^2 - 2\lambda(\epsilon)\int_\Omega u_\epsilon^2\, dx.$$

の左右各項を評価する。そのとき **PDE methods** を用いるが、ここでは詳しくは立ち入らない。

左辺の評価。

$$\lim_{\epsilon \to 0}\int_\Omega u_\epsilon^{p+1-\epsilon}\, dx = \left(\frac{S_N}{N(N-2)}\right)^{N/2}.$$

右辺の評価。まず、

$$\mu_\epsilon^{-(N-2)/2} u_\epsilon(x) \to (N-2)\sigma_N G_N(x) \qquad \text{in } W^{1,q}(\Omega) \text{ for } q < N/(N-2)$$

を示す。その後、今簡単のため $N \geq 5$ に限るが、$\epsilon \to 0$ のとき、

$$\int_{\partial\Omega}(x,n)\left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial n}\right)^2 = (N-2)^2\sigma_N \mu_\epsilon^{N-2} + o(\mu_\epsilon^{N-2})$$

$$2\lambda(\epsilon)\int_\Omega u_\epsilon^2\, dx = 2\sigma_N a_N \lambda_\epsilon \mu_\epsilon^2 + o(\lambda_\epsilon \mu_\epsilon^2)$$

を示す。

REFERENCES

[AP] F.V.Atkinson and L.A.Peletier, *Elliptic equations with nearly critical growth*, J. Diff. Eqs. **70** (1987), 349-365.

[BN] H.Brezis and L.Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), 437-477.

[BP] H.Brezis and L.A.Peletier, *Asymptotics for elliptic equations involving critical growth*, "Partial Differential Equations and the Calculus of Variations, Essays in Honor of E.De.Giorgi," Birkhäuser, 1989, pp. 149-192.

[GNN] B.Gidas, W.-M.Ni and L.Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.